УДК 654.1

О ГИБКОМ РАСШИРЕНИИ КАНАЛЬНОЙ ЕМКОСТИ КОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ С КОДОВЫМ РАЗДЕЛЕНИЕМ КАНАЛОВ

А. А. Востриков, Е. В. Самохина, А. М. Сергеев

Обсуждается возможность гибкого расширения набора кодовых последовательностей в системе коммуникаций с кодовым разделением каналов. Рассматриваются упорядоченные по Уолшу матрицы Мерсенна, существующие на соседних с матрицами Адамара порядках. Приводятся портреты матриц, показывающие их структуру в виде строк (столбцов) – функций Уолша.

***Ключевые слова**: кодовое разделение каналов, Code Division Multiple Access, кодовая последовательность Уолша, матрица Адамара – Уолша, матрица Мерсенна – Уолша.*

Введение

Беспроводная передача информации сегодня становится основным способом коммуникаций при постоянно возрастающем количестве пользователей. Это требует решения актуального вопроса: как организовать передачу данных при ограниченных ресурсах частотного диапазона и возрастающих требованиях к качеству и количеству передаваемой информации.

Одним из способов организации коммуникаций является кодовое разделение каналов (КРК), используемое, например, в стандарте IS-95 компании «Куалкомм» (*Qualcom*), получившем наибольшую известность как *Code Division Multiple Access* (CDMA) [1, 2] после появления использующих его сетей сотовой мобильной связи.

Принципы КРК до сих пор используются в сетях сотовой связи, но в усовершенствованном виде, подтверждая свою актуальность и эффективность [3].

Основа КРК – использование уникальных кодов для каждого пользователя, позволяющее одновременно передавать данные от нескольких пользователей в одном широком частотном диапазоне, повышая устойчивость системы к помехам. Эти коды, получаемые, например, из строк ортогональных матриц Адамара – Уолша, обеспечивают изоляцию сигналов. В системах, поддерживающих большее количество пользователей, используются матрицы порядков 32, 64, 128 и даже 256, в зависимости от архитектуры системы и требований к производительности.

Указанные порядки матриц входят в сильвестрову последовательность 2^k, где k – целое число, определяя способ получения матриц удвоением порядка [4], хотя матрицы Адамара, согласно его гипотезе, существуют на всех порядках $4t$, где t – натуральное число.

В данной работе рассматриваются структурированные матрицы промежуточных порядков, покрывающих диапазон от 32 до 256 более часто, что может быть использовано для обеспечения большей гибкости КРК к требованиям системы и ее производительности.

Передача в канале системы с кодовым разделением каналов

С использованием КРК исходный передаваемый цифровой сигнал, представляемый бинарными последовательностями из {0, 1}, перемножается с кодовой последовательностью Уолша из {1, –1}, характерной для выбранного канала [1, 5]. Такие последовательности представляют собой строки преобразованных ортогональных матриц Адамара порядков n, обозначаемых как $\mathbf{H}_n$ [4] с элементами 1 и –1. Для них выполняется условие ортогональности $\mathbf{H}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_n = n\mathbf{I}$, где $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(1, 1, 1, \ldots, 1)$ и любые пары строк имеют нулевую корреляцию.

Методы вычисления ортогональных матриц известны из теории чисел и впервые один из них предложен Пэли [6]. Однако использование его метода не дает возможности вычисления матриц порядков 92, 116, 156, 172, 184, 188, 232, 236 и др. [7]. Другие методы также имеют значительные пропуски порядков в последовательностях вычисляемых ими матриц Адамара.

Для получения матрицы Адамара, структурированной по Уолшу – матрицы Адамара – Уолша, можно воспользоваться ее умножением на –1 и перестановками строк и столбцов, не меняющих ее ортогональность, получив строки, упорядоченные по частоте смены знака. Именно строки и представляют собой функции Уолша. Пример матрицы Адамара – Уолша в виде ее портрета, на котором белое поле соответствует единичному значению элемента матрицы, а черное – элементу со значением –1, приведен на рис. 1.

Однако, приведение строк матрицы к упорядоченному виду по частоте смены знака элементов в строках (столбцах) не является обязательным,

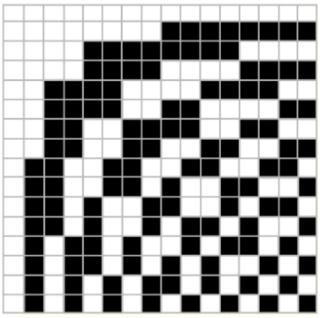
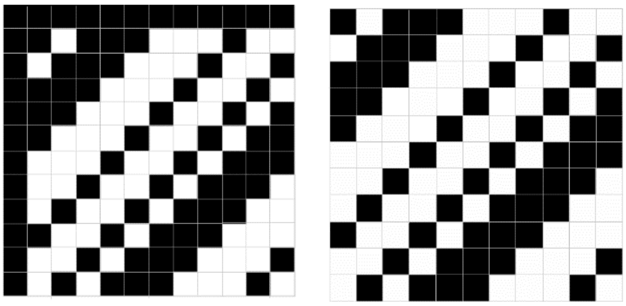


Рис. 1. Матрицы Адамара – Уолша порядка 16



а *б*

Рис. 2. Портреты взаимосвязанных матриц $\mathbf{H}_{12}$ (*а*) и $\mathbf{M}_{11}$ (*б*)

поскольку имеется лишь одно основное требование – строки матрицы должны быть ортогональны для извлечения из смеси сигналов на приемнике нужного. Это ключевой момент в формировании сигнала при CDMA [8].

В работах [1 – 3] достаточно подробно рассматривается вопрос приема и обработки сигналов в системе кодового разделения. В общем случае передача символа кодируется n символами функции Уолша из матрицы Адамара порядка n. Поэтому происходит расширение спектра в n раз.

Расширенный спектр имеет ряд преимуществ, обеспечивая, во-первых, устойчивость к узкополосным помехам, у которых ширина спектра намного уже ширины спектра сигнала. Во-вторых, обеспечивается устойчивость к частотно-селективным замираниям, проявляющимся при многолучевом распространении сигнала. При широком спектре сигнала (например, десятки МГц) замирания происходят не на всех частотах и такой сигнал может быть принят и обработан.

Однако, увеличение ширины спектра необходимо и при возрастании количества обслуживаемых пользователей (абонентских станций) и связано с добавлением строк и столбцов (кодовых последовательностей для новых пользователей) к используемой матрице Адамара. Таким образом, увеличение длины кодовой последовательности Уолша напрямую влияет на расширение спектра.

Связь матриц Адамара и Мерсенна

В качестве альтернативы матрицам Адамара можно рассматривать матрицы Мерсенна [9]. Они так же имеют два значения элементов $\{1, -b\}$ и для них выполняется условие $\mathbf{M}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_n = \omega(n)\mathbf{I}$. Здесь $|b| < 1$, а $\omega(n)$ как функция от порядка матрицы с его возрастанием приближается к n.

Согласно гипотезе Балонина [9] такие матрицы существуют на всех порядках $(4t - 1)$, то есть соседних порядках с порядками матриц Адамара.

Исследования матриц Мерсенна показали, что они являются тем «ядром», которое при окаймлении (добавлении строки сверху и столбца слева) приводит к конструкции матрицы Адамара, ранее неизвестной. Например, матрица $\mathbf{H}_{4t}$ вычисляется в виде:

$$\mathbf{H}_{4t} = \begin{pmatrix} -\lambda & e^{\mathrm{T}} \\ e & \mathbf{M}_{4t-1} \end{pmatrix},$$

при замене элементов $-b$ образующей ее матрицы $\mathbf{M}_{4t-1}$ на -1. Здесь λ, e – собственное число и собственный вектор округленной целочисленной матрицы $\mathbf{M}_{4t-1}$, соответственно [4].

Обратным преобразованием, заключающимся в удалении у нормированной матрицы Адамара окаймления из верхней строки и левого столбца при изменении отрицательных значений ее элементов до значения $-b$, получим матрицу Мерсенна.

Примером такой взаимозависимости могут служить приведенные на рис. 2 портреты матриц. Поле темного цвета на портрете соответствует элементам -1 или $-b$, а поле белого цвета – элементу со значением 1.

Коды на основе матриц Мерсенна – Уолша

Порядки n матриц Мерсенна [10] входят в последовательность $(4k - 1)$. При этом необходимыми и достаточными условиями их существования являются следующие: матрицы строятся на основе цикличной структуры, а значения ее элементов, равные символам Лежандра $\chi((j - i)/n)$, вычисляются для разности индексов i и j, определяющих номера строки и столбца, соответственно [11]. Если $(j - i)$ является квадратичным вычетом по модулю n или нулем, то символ Лежандра равен единице. Если $(j - i)$ – квадратичный невычет, то – значению $-b$. Здесь b – абсолютное значение отрицательных элементов матрицы Мерсенна, меньшее единицы и вычисляемое как $b = k/(k + \sqrt{k})$. Это обстоятельство при преобразовании матрицы к виду Мерсенна – Уолша исключает возможность выполнения умножения матрицы на -1. Поэтому сводимость к функциям Уолша для них не очевидна.

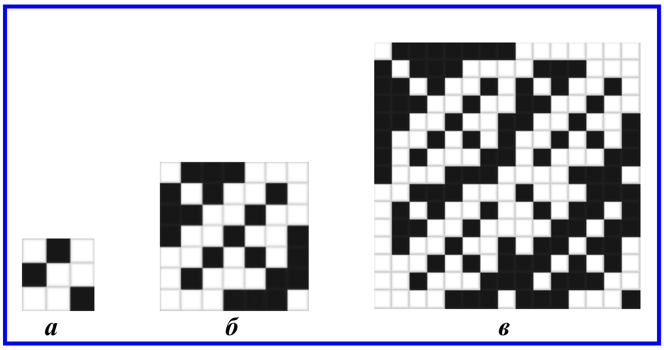


Рис. 3. Портреты матриц Мерсенна порядков 3 (*а*), 7 (*б*), 15 (*в*)

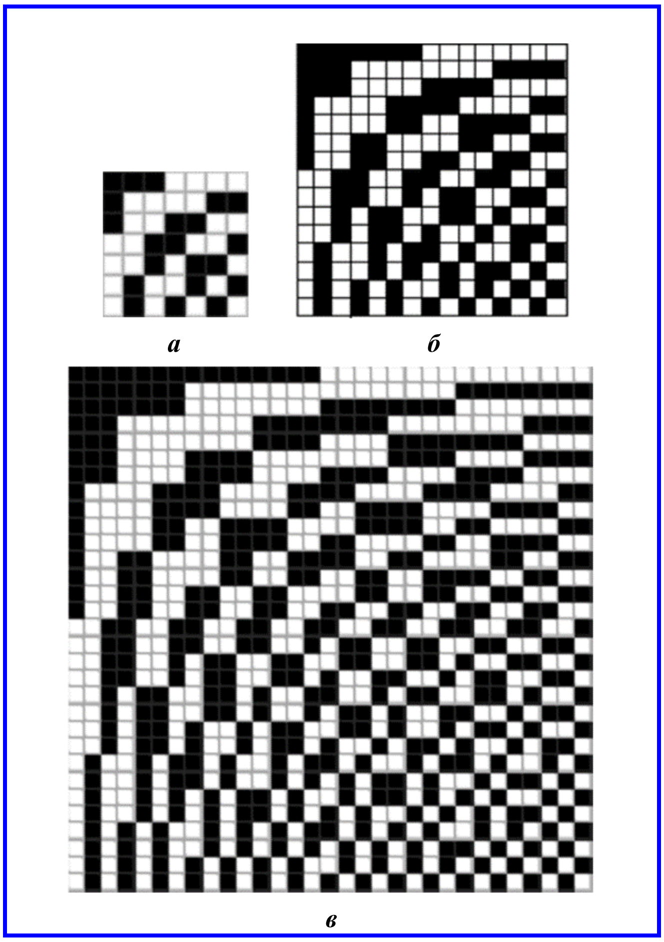


Рис. 4. Портреты упорядоченных матриц Мерсенна – Уолша порядков 7 (*а*), 15 (*б*) и 31 (*в*)

Для примера на рис. 3 приведены портреты матриц $\mathbf{M}_3$, $\mathbf{M}_7$ и $\mathbf{M}_{15}$.

Однако матрицы Мерсенна все-таки можно упорядочить перестановками их строк и столбцов. На рис. 4 представлены портреты упорядоченных матриц $\mathbf{M}_7$, $\mathbf{M}_{15}$ и $\mathbf{M}_{31}$ [12], где белое поле соответствует единичному значению элемента матрицы, а черное – элементу со значением $-b$.

Кроме матриц Адамара и Мерсенна известны и другие аналогичные матрицы, например, матрицы Эйлера с двумя значениями элементов. Они существуют на порядках, принадлежащих последовательности $(4t - 2)$ [4] и вычисляются на основе матриц Мерсенна порядка $n/2$ в виде:

$$\mathbf{E}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{n/2} & \mathbf{M}_{n/2} \\ \mathbf{M}_{n/2} & -\mathbf{M}_{n/2} \end{pmatrix}.$$

Здесь значение элемента b в матрице Мерсенна вычисляется как $b = t/(t + \sqrt{2t})$.

Таким образом, можно сформировать более широкий набор матриц на порядках от 8 до 256 и более, имеющих представление по строкам (столбцам) в виде функций Уолша, для более гибкой настройки сети под переменное количество пользователей.

Заключение

Улучшение характеристик системы с кодовым разделением каналов определяется многими факторами, в том числе количеством используемых новых кодовых последовательностей.

Используемые в кодовом разделении каналов матрицы Адамара – Уолша, существующие на порядках 2^k, дополняются аналогично упорядоченными матрицами на порядках, принадлежащих последовательностям $(4t - 1)$ и $(4t - 2)$, что позволяет повысить гибкость системы коммуникаций.

Вычисление системы ортогональных функций Мерсенна – Уолша основано на глубоко проработанных в теории чисел алгоритмах вычисления символов Лежандра и предлагаемых взаимосвязанных конструкциях ортогональных матриц.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № FSRF-2023-0003 «Фундаментальные основы построения помехозащищенных систем космической и спутниковой связи, относительной навигации, технического зрения и аэрокосмического мониторинга».

Литература

1. Ipatov, V. P. Spread Spectrum and CDMA: Principles and Applications / V. P. Ipatov. – Hoboken, New Jersey, U. S. : John Wiley & Sons Ltd, 2004. – 400 p.
2. Бабков, В. Ю. Системы мобильной связи с кодовым разделением каналов / В. Ю. Бабков, А. Н. Никитин, К. Н. Осенний. – Санкт-Петербург : ООО «Издательство «Триада», 2003. – 239 с.
3. Безруков, А. В. Преимущества и основные параметры цифровых сотовых систем связи стандарта IS–95 (CDMA) // Электросвязь. – 1999. – № 12. – С. 20–22.

4. Балонин, Н. А. Специальные матрицы: псевдообратные, ортогональные, адамаровы и критские / Н. А. Балонин, М. Б. Сергеев. – Санкт-Петербург : Изд-во Политехника, 2019. – 196 с.
5. Чистяков, Е. А. Кодовое разделение каналов / Е. А. Чистяков, И. А. Мартынов, Е. В. Самохина // Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ. – 2023. – Т. 192. – № 1. – С. 27–32.
6. Paley, R. E. A. C. A Remarkable Series of Orthogonal Functions. I, II / R. E. A. C. Paley // Proceedings of the London Mathematical Society. – 1932. – Vol. 34. – P. 241–279.
7. Baumert, L. D. A new construction for Hadamard matrices / L. D. Baumert, M. Hall // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1965. – № 71. – P. 169–170.
8. Zigangirov, K. Sh. Theory of code division multiple access communication / K. Sh. Zigangirov. – Hoboken, New Jersey, U. S. : John Wiley & Sons, 2004. – 416 p.
9. Сергеев, А. М. Обобщенные матрицы Мерсенна и гипотеза Балонина / А. М. Сергеев // Автоматика и вычислительная техника. – 2014. – № 4. – С. 35.
10. Вычисление матриц Мерсенна – Уолша / Н. А. Балонин, Ю. Н. Балонин, А. А. Востриков [и др.]. – DOI : 10.14489/vkit.2014.011 // Вестник компьютерных и информационных технологий. – 2014. – № 11 (125). – С. 51–56.
11. Балонин, Н. А. К вопросу существования матриц Мерсенна и Адамара / Н. А. Балонин, М. Б. Сергеев // Информационно-управляющие системы. – 2013. – № 5. – С. 2–8.
12. Сергеев, А. М. Специальные матрицы: вычисление и применение / А. М. Сергеев, А. А. Востриков. – Санкт-Петербург : Политехника, 2018. – 114 с.

Поступила в редакцию 13.03.2025

***Антон Александрович Востриков**, кандидат технических наук, доцент,*
т. +7 (921) 943-04-22, e-mail: vostricov@mail.ru.
(ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения»).
***Елена Викторовна Самохина**, кандидат технических наук, доцент,*
т. +7 (909) 623-40-77, e-mail: samohina@mirea.ru.
(МИРЭА – Российский технологический университет).
***Александр Михайлович Сергеев**, кандидат технических наук, доцент,*
т. +7 (905) 201-08-47, e-mail: aleks.asklab@gmail.com.
(ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения»).

FLEXIBLE EXPANSION OF CHANNEL CAPACITY OF COMMUNICATION SYSTEMS WITH CHANNEL CODE DIVISION

A. A. Vostrikov, E. V. Samokhina, A. M. Sergeev

The possibility of flexibly expanding the set of code sequences in a channel-separated communication system is discussed. The Walsh-ordered Mersenne matrices existing on adjacent orders with Hadamard matrices are considered. Portraits of matrices are given, showing their structure in the form of rows (columns) of Walsh functions.
***Key words**: channel code separation, Code Division Multiple Access, walsh code sequence, Hadamard – Walsh matrix, Mersenne – Walsh matrix.*

References

1. Ipatov, V. P. Spread Spectrum and CDMA: Principles and Applications / V. P. Ipatov. – Hoboken, New Jersey, U. S. : John Wiley & Sons Ltd, 2004. – 400 p.
2. Babkov, V. Yu. Code division multiplexing mobile communication systems / V. Yu. Babkov, A. N. Nikitin, K. N. Oseniy. – Saint-Petersburg : Triada Publishing House, 2003. – 239 p.
3. Bezrukov, A. V. Advantages and main parameters of digital cellular communication systems of the IS-95 standard (CDMA) // Electrosvyaz. – 1999. – № 12. – P. 20–22.
4. Balonin, N. A. Special matrices: pseudoinverse, orthogonal, Hadamard and Cretan / N. A. Balonin, M. B. Sergeev. – Saint-Petersburg : Polytechnica Publishing House, 2019. – 196 p.
5. Chistyakov, Ye. A. Code division of channels / Ye. A. Chistyakov, I. A. Martynov, Ye. V. Samohina // Electromechanical matters. VNIIEM Studies. – 2023. – Vol. 192. – № 1. – P. 27–32.
6. Paley, R. E. A. C. A Remarkable Series of Orthogonal Functions. I, II / R. E. A. C. Paley // Proceedings of the London Mathematical Society. – 1932. – Vol. 34. – P. 241–279.
7. Baumert, L. D. A new construction for Hadamard matrices / L. D. Baumert, M. Hall // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1965. – № 71. – P. 169–170.

8. Zigangirov, K. Sh. Theory of code division multiple access communication / K. Sh. Zigangirov. – Hoboken, New Jersey, U. S. : John Wiley & Sons, 2004. – 416 p.
9. Sergeev, A. M. Generalized Mersenne Matrices and Balonin's Conjecture / A. M. Sergeev // Automation and computing technology. – 2014. – № 4. – P. 35.
10. Calculating Mersenne-Walsh Matrices / N. A. Balonin, Yu. N. Balonin, A. A. Vostrikov [et. al]. – DOI : 10.14489/vkit.2014.011 // Bulletin of computer and information technologies. – 2014. – № 11 (125). – P. 51–56.
11. Balonin, N. A. On the existence of Mersenne and Hadamard matrices / N. A. Balonin, M. B. Sergeev // Informatsionno-upravliaiushchie sistemy. – 2013. – № 5. – P. 2–8.
12. Sergeev, A. M. Special Matrices: Calculation and Application / A. M. Sergeev, A. A. Vostrikov. – Saint-Petersburg : Polytechnica Publishing House, 2018. – 114 p.

Anton Aleksandrovich Vostrikov*, candidate of technical sciences, associate professor,*
t. +7 (921) 943-04-22, e-mail: vostricov@mail.ru.
(Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
«Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation»).
Elena Viktorovna Samokhina*, candidate of technical sciences, associate professor,*
t. +7 (909) 623-40-77, e-mail: samohina@mirea.ru.
(RTU MIREA).
Aleksandr Mikhajilovich Sergeev*, candidate of technical sciences, associate professor,*
t. +7 (905) 201-08-47, e-mail: aleks.asklab@gmail.com.
(Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
«Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation»).